ハミルトン系のカオスの拡大率スペクトル(カオスとその周辺,研究会報告)

堀田, 武彦; 森, 肇

ハミルトン系のカオスの拡大率スペクトル

九大理 堀田 武彦、九州共立大 森 肇

ラグランジュ乱流における染料の混合について考える。ラグランジュ乱流では染料は引き伸ばされ折り畳まれて、混ざり拡がる。引き伸ばしの方向と直交する方向には染料は縮む、そのため、この方向の濃度勾配は増大する。隣接した2つの流体粒子は時間と共に指数関数的に分離して行く(カオス)、したがって、濃度勾配も指数関数的に増大する。濃度勾配の増大は、分子拡散を強め、流体粒子に乗った移流と共に、染料の混合・拡散に寄与する。

今、時間的に周期変動をする速度場を持った2次元非圧縮流体の層流を考える。速度場の変動の1周期ごとに離散化された時刻を用いると、流体粒子の運動は2次元の面積保存写像 T によって記述される。時刻 n 、点 X での染料の濃度を $C_n(X)$ 濃度勾配を $\nabla C_n(X)$ とすると

$$
\begin{aligned}
C_{n+1}(X) &= \int \delta(X - T(Y))C_n(Y)dY, \\
&= C_n(T^{-1}(X)) \quad (\because \det DT = 1), \\
\nabla C_{n+1}(X) &= {}^t DT^{-1}(X)\nabla C_n(T^{-1}(x)), \\
\nabla C_n(X) &= {}^t[DT(T^{-1}(X))DT(T^{-2}(X))\cdots DT(T^{-n}(X))]^{-1}\nabla C_0(T^{-n}(X))
\end{aligned}
$$

となる。ここでは、スタンダード・マップ $(\theta_{t+1} = \theta_t + J_{t+1},\ J_{t+1} = J_t - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_t))$ をこの T モデルとしてとり、$n=0$ での濃度勾配は、一様であるとして、$\nabla C_t(X)$ の振る舞いを数値実験により調べた。

$$
\gamma_n(X) \equiv (1/t)\log|\nabla C_n(X)|
$$

とし、$\gamma_n(X)$ の分布を求めた。図1は、$K=3.86$ において、$r=0.5$ の線分上の51200個の点 X について $\gamma_n(X)$ のヒストグラム $P(\gamma;n)$ をとり、

$$
\psi(\gamma) \equiv -(1/n)\log P(\gamma;n)/P(\bar{\gamma}_n;n)
$$

をプロットしたものである(ここで、$\bar{\gamma}_n$ は、$P(\gamma;n)$ を、最大とする γ の値)。これは、軌道拡大率のスペクトル $\psi(\Lambda)$[1] と同様の振る舞いを示す事がわかる(図2参照)。このことは、実験的に、軌道拡大率のスペクトルが、濃度勾配の測定によって求められる事を示唆する、

また、はじめに述べたように、濃度勾配の増大は分子拡散を強める、そのため、流体の混合の度合いのメジャーとして、$\psi(\Lambda)$ が役立つ可能性も示唆している。今後の課題として、$\psi(\gamma)$ と混合の関係を明らかにしたい。

前回の講演（８９年１２月）では、$\Lambda_n(X)$ の定義の際、ヤコビアン行列の最大固有値を用いたが[1]、今回は、不安定多様体に沿った方向の接ベクトルを用いた。このため、Λの値として、負の値が許されるようになり新たな側面が見えてきた。図２は、$K = 3.96$ における $\psi(\Lambda)$ を、示したものである。$\Lambda < 0$ の領域に直線部分が現れている事がわかる。図３は、これをはっきりと見えるように、nを小さくし、大きな値のψまで見えるようにしたものである。Λが負の領域で$\psi(\Lambda) \sim -2\Lambda$であることがわかる。これは、安定多様体と不安定多様体の homoclinic tangency point によるものである。傾き-2 は理論的に導ける。[2]

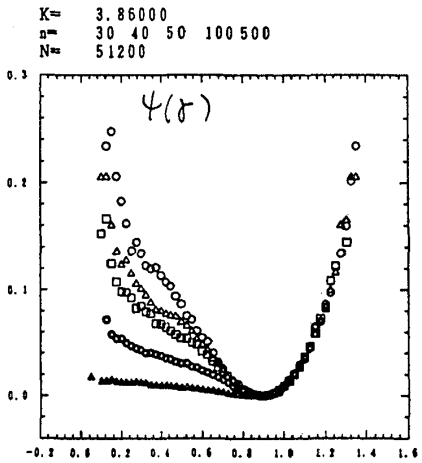

図1

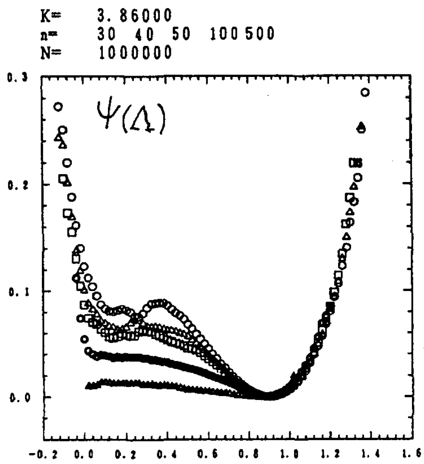

図2

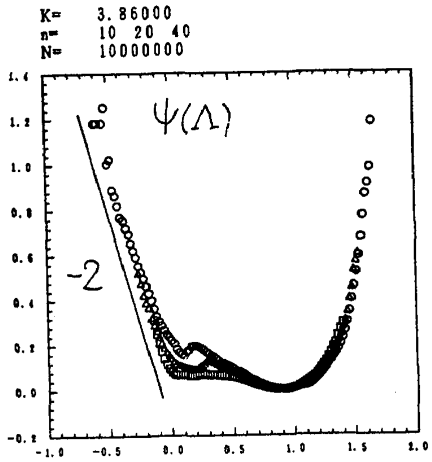

図3

[1] H.Mori et al. Prog. Theor. Phys. Suppl. **99**(1989) 1.
T.Horita et al. Prog. Theor. Phys. **83**(1990), 1065.

[2] T.Horita et al. 準備中